EXERCICE 1

Soit ABC un triangle non rectangle. A', B', C' les milieux respectifs des cotes $[BC], [CA]$ et $[AB]$. O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. α, β, γ sont les déterminations principales en radians des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

1°/ Démontrer que $(tan\alpha)\overrightarrow{OA'} + (tan\beta)\overrightarrow{OB'} + (tan\gamma)\overrightarrow{OC'} = \vec{0}$.

En déduire que: $(\tan\beta + \tan\gamma)\overrightarrow{OA} + (\tan\gamma + \tan\alpha)\overrightarrow{OB} + (\tan\alpha + \tan\beta)\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

2°/ Démontrer que pour tous réels a et b tels que $\cos(a)$ et $\cos(b)$ soient non nuls on a:

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a) \times \cos(b)}$$

3°/ Démontrer alors $(\sin\alpha \cos\alpha)\overrightarrow{OA} + (\sin\beta \cos\beta)\overrightarrow{OB} + (\sin\gamma \cos\gamma)\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

4°/ En déduire que O est barycentre du système $\{(A, \sin(2\alpha));\ (B, \sin(2\beta)); (C, \sin(2\gamma))\}$

EXERCICE 2

Soient U_0 et V_0 deux réels tels que $V_0 > U_0 > 0$. On pose pour tout n:

$U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$ et $V_{n+1} = \sqrt{U_{n+1}V_n}$

1°/ Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont à termes positifs.

2°/ Montrer que pour tout n: $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{U_{n+1}}\frac{V_n - U_n}{\sqrt{V_n} + \sqrt{U_{n+1}}}$

En déduire le signe de $V_n - U_n$

3°/ Etudier la monotonie de (U_n) et (V_n)

4°/ a) Montrer que $0 < V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{4}(V_n - U_n)$

b) En déduire alors que pour tout n, $V_n - U_n < \left(\frac{1}{4}\right)^n (V_0 - U_0)$

5°/ Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et ont la même limite