

Géométrie affine

1. ESPACES AFFINES

1.1. Définition.

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Un espace affine d'espace vectoriel associé E est un ensemble \mathcal{E} dont les éléments sont appelés des points, et qui est muni d'une application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans E , notée $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$, et qui satisfait les deux propriétés suivantes

(i) pour tout vecteur \vec{u} de E , et tout point A de \mathcal{E} , il existe un unique point M de \mathcal{E} tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$;

(ii) si A, B, C sont trois points de \mathcal{E} , on a la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

La dimension de \mathcal{E} est la dimension de l'espace vectoriel associé.

Exemple 1.1. L'espace affine \mathbb{R}^n est l'ensemble des points $M(x_1, \dots, x_n)$ quand les x_i , $1 \leq i \leq n$, varient dans \mathbb{R} .

Remarque 1.1. 1. Tout espace vectoriel E peut être considéré comme un espace affine d'espace vectoriel associé E .

2. Dans le cas $n = 2$, on parle du *plan affine*.

3. Dans le cas $n = 3$, on parle de l'*espace affine de dimension 3*.

1.2. Repères affines.

Définition 1.2. Soit \mathcal{E} espace affine de dimension n , d'espace vectoriel associé E . Un repère affine de \mathcal{E} $(A, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est la donnée

— d'un point A de \mathcal{E} , l'origine du repère ;

— d'une base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de E .

Alors pour tout point M de \mathcal{E} , le vecteur \overrightarrow{AM} s'écrit de façon unique comme

$$\overrightarrow{AM} = x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_n \vec{u}_n$$

On dit que x_1, \dots, x_n sont les coordonnées de M dans le repère.

Exemple 1.2. On ramène l'espace (vectoriel) \mathbb{R}^n à la base canonique $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

On note O le point $(0, \dots, 0)$ de l'espace affine \mathbb{R}^n .

Dans le repère (O, e_1, \dots, e_n) , le point $M(x_1, \dots, x_n)$ est défini par $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$. On remarque que x_1, \dots, x_n sont les coordonnées de M .

Remarque 1.2. 1. Si $A(x_1, \dots, x_n)$ et $B(y_1, \dots, y_n)$ sont deux points de \mathbb{R}^n , alors \overrightarrow{AB} est le vecteur de coordonnées $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$. On écrit parfois qu'un vecteur est une différence de points $\overrightarrow{AB} = B - A$, ce qui permet de retrouver facilement la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \overrightarrow{AC}.$$

2. Dans le cas $n = 2$, les coordonnées d'un point sont respectivement son *abscisse* et son *ordonnée*.

3. Dans le cas $n = 3$, les coordonnées d'un point sont respectivement son *abscisse*, son *ordonnée* et sa *côte*.

Proposition 1.1. Dans l'espace affine \mathbb{R}^n , on considère deux repères $\mathcal{R}_1(A, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ et $\mathcal{R}_2(B, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$.

Soit M un point de \mathbb{R}^n . On note ses coordonnées dans \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sous la forme de vecteurs colonnes X_1 et X_2 . Alors on a la relation

$$X_2 = PX_1 + Y$$

où on a noté

- P la matrice de passage de la base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ à la base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$;
- Y le vecteur colonne des coordonnées de \vec{BA} dans la base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$.

1.3. Orientation.

Définition 1.3. Soit E un espace vectoriel. Une orientation de E est le choix d'une base directe \mathcal{B} de E . Toute autre base \mathcal{B}' de E sera dite

- directe quand le déterminant de la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est positif,
- indirecte quand le déterminant de la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est négatif.

Une orientation d'un espace affine \mathcal{E} est le choix d'une base directe de l'espace vectoriel associé.

Dans le cas de l'espace affine \mathbb{R}^n , on fixe l'orientation par le choix de la base canonique.

Attention : l'orientation dépend de l'ordre dans lequel les vecteurs de la base sont écrits.

Exemple 1.3. 1. Dans \mathbb{R}^2 , la base canonique est directe, mais la base $\{(0, 1), (1, 0)\}$ est indirecte.

2. Dans \mathbb{R}^2 , la base canonique est directe, ainsi que les bases

$$\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\} \text{ et } \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

mais les bases

$$\{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}, \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \text{ et } \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

sont indirectes.

2. SOUS-ESPACES AFFINES

2.1. Définition. Les *sous-espaces affines* de l'espace affine \mathcal{E} ressemblent beaucoup aux sous espaces vectoriels de l'espace vectoriel associé E . A chaque fois qu'on aura un sous-espace affine \mathcal{F} de \mathcal{E} , on pourra lui associer un sous-espace vectoriel $F = \vec{\mathcal{F}}$ de E , sa *direction*. Mais les sous-espaces vectoriels contiennent tous l'"origine" (le vecteur nul) alors que les sous espaces affines peuvent ne pas la contenir.

Définition 2.1. Soit \mathcal{E} un espace affine d'espace vectoriel associé E . Si F est un sous-espace vectoriel de E , et M un point de \mathcal{E} , alors le sous-espace affine \mathcal{F} passant par M et de direction F est l'ensemble $M + F$ des points N de \mathcal{E} tels que $\vec{MN} \in F$. La dimension de \mathcal{F} est la dimension du sous-espace vectoriel F .

Un sous-espace affine de dimension 1 est une droite affine, de dimension 2 un plan affine, de dimension $n - 1$ un hyperplan affine.

Proposition 2.1. Soit \mathcal{E} un espace affine, et E l'espace vectoriel associé.

Un sous-ensemble \mathcal{F} de \mathcal{E} est un sous-espace affine ssi le sous-ensemble $F = \{\overrightarrow{MN}, M \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E , qui est alors la direction de \mathcal{F} .

Pour M_0 un point quelconque de \mathcal{F} , on a aussi $F = \{\overrightarrow{M_0N}, N \in \mathcal{F}\}$, c'est à dire qu'il suffit de montrer que ce dernier ensemble est un sous-espace vectoriel de E pour montrer que \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathcal{E} .

Définition 2.2. Si D est une droite de \mathcal{E} , tout vecteur non nul de \overrightarrow{D} est un vecteur directeur de D .

On dit que des points A_1, \dots, A_n sont colinéaires quand ils appartiennent à une même droite affine. On dit qu'ils sont coplanaires quand ils appartiennent à un même plan affine.

Remarque 2.1. — si V est un sous-espace affine de \mathcal{E} , et M un point de V , l'application qui à un vecteur \vec{v} de \overrightarrow{V} associe le point N tel que $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$ (ou $N = M + \vec{v}$) est une bijection de \overrightarrow{V} sur V ;
— si M est un point de \mathcal{E} , l'application qui à un sous-espace vectoriel F de E associe le sous-espace affine $M + F = \{M + \vec{v}, \vec{v} \in F\}$ est une bijection entre l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E l'ensemble des sous-espaces affines de \mathcal{E} contenant M .

Définition 2.3. Soit X une partie d'un espace affine \mathcal{E} . Le sous-espace affine engendré par X est le plus petit sous-espace affine contenant X ; on le note $\text{Aff}(X)$.

On dit que des points A_0, \dots, A_k sont affinement indépendants quand le sous-espace affine $\text{Aff}\{A_0, \dots, A_k\}$ qu'ils engendrent est de dimension k .

Proposition 2.2. Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension n , et X une partie de \mathcal{E} .

1. Soit $M \in X$. Le sous-espace affine engendré par X est l'ensemble

$$M + \text{Vect}\{\overrightarrow{MN}, N \in X\}$$

2. Les points A_0, \dots, A_k de \mathcal{E} sont affinement indépendants ssi la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}\}$ est une famille libre de E .
3. En particulier, les points A_0, \dots, A_n sont affinement indépendants ssi la famille $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ est une base de E , ssi $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère de \mathcal{E} .

Remarque 2.2. Trois points affinement indépendants forment un *triangle*.

Quatre points affinement indépendants forment un *tétraèdre*.

Exemple 2.1. — Si $X = \{A, B\}$ est formé de deux points distincts, alors $\text{Aff}(X)$ est la droite (AB) ;

- si $X = \{A, B, C\}$ est formé de trois points deux à deux distincts, on a deux situations : soit les trois points ne sont pas affinement indépendants : ils sont colinéaires, et $\text{Aff}(X)$ est une droite. Sinon ils ne sont pas colinéaires, et $\text{Aff}(X)$ est le plan (ABC) .
- quatre points sont affinement indépendants ssi ils ne sont pas coplanaires.

2.2. Exemples en petite dimension. Puisque les sous-espaces vectoriels du plan sont $\{\vec{0}\}$, les droites et \mathbb{R}^2 lui même, et que les sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 sont $\{\vec{0}\}$, les droites, les plans et \mathbb{R}^3 lui même, on déduit de la définition précédente la classification suivante pour les sous-espaces affines du plan et de l'espace

1. les sous espaces affines du plan \mathbb{R}^2 sont :
 - (i) les singletons $\{M\}$, la direction est alors le sous-espace vectoriel nul $\{\vec{0}\}$;
 - (ii) les droites D , d'équation $ax + by + c = 0$, la direction est la droite vectorielle \vec{D} d'équation $ax + by = 0$;
 - (iii) le plan \mathbb{R}^2 tout entier.
2. les sous espaces affines de l'espace \mathbb{R}^3 sont :
 - (i) les singletons $\{M\}$, la direction est alors le sous-espace vectoriel nul $\{\vec{0}\}$;
 - (ii) les droites D , d'équations $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$, la direction est la droite vectorielle \vec{D} d'équations $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$;
 - (iii) les plans P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ la direction est le plan vectoriel \vec{P} d'équation $ax + by + cz = 0$;
 - (iv) l'espace \mathbb{R}^3 tout entier.

Remarque 2.3. Si (AB) est une droite de l'espace affine \mathbb{R}^2 ramené à un repère affine, on peut donner

- une représentation paramétrique de (AB) en écrivant en coordonnées que

$$(AB) = \left\{ M \in \mathbb{R}^2, \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \right\}$$

- une équation cartésienne de (AB) en écrivant en coordonnées

$$(AB) = \left\{ M \in \mathbb{R}^2, \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \right\}$$

Remarque 2.4. Si (AB) est une droite de l'espace affine \mathbb{R}^3 ramené à un repère affine, on peut donner une représentation paramétrique de (AB) en écrivant en coordonnées que

$$(AB) = \left\{ M \in \mathbb{R}^3, \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \right\}$$

On en déduit un système d'équations cartésiennes de (AB) en chassant t dans la représentation paramétrique, pour donner deux équations liant les coordonnées (x, y, z) de M .

Remarque 2.5. Si (ABC) est un plan de l'espace affine \mathbb{R}^3 ramené à un repère affine, on peut donner

- une représentation paramétrique de (ABC) en écrivant en coordonnées que

$$(ABC) = \left\{ M \in \mathbb{R}^3, \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \right\}$$

- une équation cartésienne de (ABC) en écrivant en coordonnées

$$(ABC) = \left\{ M \in \mathbb{R}^3, \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \right\}$$

2.3. Parallélisme.

Définition 2.4. Deux sous-espaces affines sont parallèles quand la direction de l'un est contenue dans celle de l'autre.

Proposition 2.3. Si deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles, alors soit leur intersection est vide, soit l'un est contenu dans l'autre.

Remarque 2.6. On peut déduire de cette définition les propriétés (bien connues) suivantes

- par un point M il passe une unique droite parallèle à une droite donnée D ;
- deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles ;
- deux droites d'un plan sont parallèles ssi elles ne se rencontrent pas.

2.4. Intersection de sous-espaces affines. De la même façon qu'une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, une intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine.

Proposition 2.4. *Soit \mathcal{E} un espace affine.*

1. *Une intersection quelconque de sous-espaces affines $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est vide, ou c'est un sous-espace affine de direction l'intersection des directions F_i .*
2. *Si \mathcal{F} et \mathcal{G} ont deux sous-espaces affines dont les directions sont supplémentaires, leur intersection est réduite à un point.*

Exemple 2.2. Dans le plan affine \mathbb{R}^2 , l'intersection de deux droites est soit vide, soit un point, soit une droite.

Dans l'espace affine \mathbb{R}^3 , l'intersection de deux plans est vide, ou c'est une droite, ou c'est un plan.

L'intersection d'une droite et d'un plan est soit vide, soit un point, soit une droite.

Finalement, l'intersection de deux droites est soit vide, soit un point, soit une droite.

Exercice 2.1. Redémontrer le théorème du toit : si \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont deux plans, qui contiennent respectivement deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 parallèles, alors $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite parallèle à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .

3. BARYCENTRES ET CONVEXITÉ.

On note \mathcal{E} un espace affine de dimension n .

Proposition 3.1. *On note A_1, \dots, A_k des points de \mathcal{E} , et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels. On leur associe l'application vectorielle de Leibniz de \mathcal{E} dans E , définie pour tout point M de \mathcal{E} par*

$$f(M) = \lambda_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{MA_k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

Alors cette application est

- constante si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$;
- une bijection si $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$.

Définition 3.1. *Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$, alors le barycentre des points A_i affectés des poids λ_i est l'unique point G de \mathcal{E} qui vérifie*

$$\lambda_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0},$$

et on le note $G = \text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq k})$.

Proposition 3.2. *Soient A_i, B_j des points de \mathcal{E} .*

i/ On a, pour tout point M de \mathcal{E} ,

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) \overrightarrow{MG} = \lambda_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{MA_k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

ii/ Le barycentre ne change pas si on multiplie tous les poids par un réel non nul : si $\alpha \in \mathbb{R}^\times$

$$\text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq k}) = \text{Bar}((A_i, \alpha \lambda_i)_{1 \leq i \leq k}),$$

en particulier on peut toujours supposer que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

iii/ Si les points A_i ont pour coordonnées (x_{i1}, \dots, x_{in}) dans un repère de \mathcal{E} , alors dans ce repère le barycentre $\text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq k})$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} \sum_{i=1}^k \lambda_i x_{i1}, \dots, \frac{1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} \sum_{i=1}^k \lambda_i x_{in} \right).$$

iv/ quand tous les poids sont égaux, on dit que G est l'isobarycentre des A_i .

v/ Associativité du barycentre : on considère deux familles de points A_1, \dots, A_k et B_1, \dots, B_m de \mathcal{E} , ainsi que des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m$ tels que $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^m \mu_i \neq 0$, et $\sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{i=1}^m \mu_i \neq 0$. Alors si $G_1 = \text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq k})$, $G_2 = \text{Bar}((B_i, \mu_i)_{1 \leq i \leq m})$, on a

$$G = \text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq k}, (B_i, \mu_i)_{1 \leq i \leq m}) = \text{Bar} \left((G_1, \sum_{i=1}^k \lambda_i), (G_2, \sum_{i=1}^m \mu_i) \right).$$

vi/ le sous-espace affine engendré par les points A_1, \dots, A_k est l'ensemble des barycentres des A_i ; en particulier un sous-ensemble d'un espace affine \mathcal{E} est un sous-espace affine ssi il est stable par barycentration.

vii/ si A_0, \dots, A_n sont affinement indépendants dans \mathcal{E} , tout point M de \mathcal{E} s'écrit de façon unique comme barycentre des A_i , $M = \text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{0 \leq i \leq n})$, avec la condition $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$.

Définition 3.2. Une famille de $n + 1$ points affinement indépendants A_0, \dots, A_n de \mathcal{E} forme un repère barycentrique de \mathcal{E} ; les poids d'un point M donnés par le résultat précédent sont les **coordonnées barycentriques** de M dans ce repère.

Définition 3.3. Si A et B sont deux points de \mathcal{E} , le segment $[AB]$ est l'ensemble des points de \mathcal{E} qui sont des barycentres à poids positifs de A et B .

Une partie X de \mathcal{E} est convexe quand pour tous points A, B de X , le segment $[AB]$ est contenu dans X .

Si X est une partie quelconque de \mathcal{E} , l'ensemble des points de \mathcal{E} qui sont des barycentres à poids positifs d'un nombre fini de points de X est l'enveloppe convexe de X . C'est aussi le plus petit convexe contenant X , et l'intersection de tous les convexes contenant X .

4. APPLICATIONS AFFINES

4.1. Définitions. Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines de dimensions respectives n et m , et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application. Soit A un point de \mathcal{E} . On note E et F les espaces vectoriels associés à \mathcal{E} et \mathcal{F} .

Définition 4.1. On dit que f est une application affine quand l'application $\vec{f} : E \rightarrow F$ qui au vecteur \overrightarrow{AM} associe le vecteur $\overrightarrow{f(A)f(M)}$ est une application linéaire, indépendante de A .

Remarque 4.1. Inversement, pour définir une application affine f , il suffit de choisir une application linéaire \vec{f} et l'image d'un point $f(A)$. Alors f est l'application qui à M associe $f(M) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM})$.

Si on choisit deux repères \mathcal{R} pour \mathcal{E} et \mathcal{R}' pour \mathcal{F} , et si X est le vecteur colonne formé des coordonnées de M dans \mathcal{R} , Y le vecteur colonne formé des coordonnées de $f(M)$ dans \mathcal{R}' , alors f admet une expression matricielle de la forme

$$Y = AX + B, \quad A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbf{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$

Proposition 4.1. *On a les propriétés suivantes.*

- i/ Une application affine f est injective, surjective ou bijective quand l'application linéaire associée \vec{f} l'est. Mais on ne peut parler de noyau d'une application affine.
- ii/ Si $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sont deux applications affines, alors $g \circ f$ est une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{G} , l'application linéaire associée est $\vec{g} \circ \vec{f}$ de E dans G .

Définition 4.2. On note $A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ l'ensemble des applications affines de \mathcal{E} dans \mathcal{F} . On note $GA(\mathcal{E})$ l'ensemble des bijections affines de \mathcal{E} dans lui-même, c'est un groupe pour la composition des applications, on l'appelle le groupe affine de E .

4.2. Applications affines en petite dimension. Les applications affines de \mathbb{R}^2 dans lui-même sont les applications de la forme

$$f(x, y) = (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2), \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Elles admettent une écriture matricielle de la forme

$$Y = AX + C, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}), \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

et c'est une bijection affine ssi on a $A \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$.

Les applications affines de \mathbb{R}^3 dans lui-même sont les applications de la forme

$$f(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z + d_1, a_2x + b_2y + c_2z + d_2, a_3x + b_3y + c_3z + d_3),$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$. Elles admettent une écriture matricielle de la forme

$$Y = AX + D, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}), \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

et c'est une bijection affine ssi on a $A \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$.

4.3. Propriétés des applications affines, et systèmes d'équations linéaires.

Proposition 4.2. *Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine.*

On a les propriétés suivantes.

- i/ Une application est affine ssi elle conserve les barycentres, c'est à dire ssi pour tous A_1, \dots, A_k des points de \mathcal{E} , et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels, $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$

$$f(\text{Bar}(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq k}) = \text{Bar}((f(A_i), \lambda_i)_{1 \leq i \leq k}).$$

- ii/ L'image d'un sous-espace affine \mathcal{H} de direction H par une application affine f est un sous-espace affine de direction $\vec{f}(H)$;

- iii/ L'image réciproque d'un sous-espace affine \mathcal{G} de direction G par une application affine f est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\vec{f}^{-1}(G)$;

iv/ une application affine conserve l'alignement et le parallélisme.

Remarque 4.2. 1. La propriété (i) est utile quand on cherche à déterminer les applications affines qui laissent invariant un ensemble $\{A_1, \dots, A_k\}$ de points de \mathcal{E} (les sommets d'un triangle, d'un carré...).

En effet on remarque qu'une telle application admet comme point fixe l'isobarycentre $\text{Bar}(A_i, 1)_{1 \leq i \leq k}$.

2. On déduit comme cas particulier de la propriété (ii) que l'image de f est un sous-espace affine de \mathcal{F} de direction $\text{Im}(\vec{f})$.
3. On déduit comme cas particulier de la propriété (iii) que l'image réciproque d'un point de F est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker}(\vec{f})$.

Proposition 4.3. *On note $A \in \mathbf{M}_{mn}(\mathbb{R})$ une matrice, et $B \in \mathbf{M}_{m1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne. On note f l'application affine de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m de matrice A par rapport aux bases canoniques, et y_0 le point de \mathbb{R}^m correspondant à B dans la base canonique de \mathbb{R}^m .*

Alors l'ensemble des solutions dans \mathbb{R}^n du système d'équations linéaires

$$AX = B$$

est non vide ssi y_0 est dans l'image de f . Dans ce cas c'est un sous-espace affine de direction $\text{Ker}(\vec{f})$. En particulier, il est de dimension $n - \text{rg}(\vec{f})$.

4.4. Exemples.

4.4.1. Translations.

Définition 4.3. *Soit \vec{u} un vecteur de E . La translation de vecteur \vec{u} est l'application affine $t_{\vec{u}}$ de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui à M associe le point $M' = t_{\vec{u}}(M)$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.*

En particulier, l'application linéaire de E associée à $t_{\vec{u}}$ est l'identité. Inversement, toutes les applications affines dont l'application linéaire associée est l'identité sont des translations.

L'image d'un sous-espace affine \mathcal{F} par une translation $t_{\vec{u}}$ est un sous-espace affine parallèle. C'est \mathcal{F} si, et seulement si \vec{u} est dans le sous-espace vectoriel associé à \mathcal{F} .

La composée de deux translations est encore une translation : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$.

4.4.2. Homothéties.

Définition 4.4. *Soit A un point de \mathcal{E} et $\lambda \neq 0$ un réel. L'homothétie de centre A et de rapport λ , $h_{A,\lambda}$, est l'application affine qui fixe A et dont l'application linéaire associée est $\lambda \mathbf{I}_E$. De façon équivalente, $M' = h_{A,\lambda}(M)$ est le point tel que $\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}$.*

La composée de deux homothéties de rapports λ et μ est une homothétie de rapport $\lambda\mu$ si $\lambda\mu \neq 1$, et une translation sinon.

Dans un espace affine \mathcal{E} , l'ensemble $HT(\mathcal{E})$ est formé des homothéties et des translations de E ; c'est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.

L'image d'un sous-espace affine par une homothétie est un sous-espace affine parallèle.

4.4.3. Projections.

Définition 4.5. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de \mathcal{E} , tels que les sous-espaces vectoriels associés F et G soient supplémentaires dans E .

La projection sur \mathcal{F} parallèlement à \mathcal{G} est l'application affine qui fixe les points de \mathcal{F} (un point de \mathcal{F}) et dont l'application linéaire associée est la projection (vectorielle) sur F parallèlement à G .

On a alors $p \circ p = p$, et inversement une application affine qui satisfait cette relation est une projection sur l'ensemble de ses points fixes, parallèlement à un sous-espace affine.

4.4.4. Symétries.

Définition 4.6. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de \mathcal{E} , tels que les sous-espaces vectoriels associés F et G soient supplémentaires dans E .

La symétrie autour de \mathcal{F} parallèlement à \mathcal{G} est l'application affine s qui fixe les points de \mathcal{F} (un point de \mathcal{F}) et dont l'application linéaire associée est la symétrie (vectorielle) autour de F parallèlement à G .

4.4.5. Affinités.

Définition 4.7. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de \mathcal{E} , tels que les sous-espaces vectoriels associés F et G soient supplémentaires dans E . On fixe aussi un réel r .

L'affinité d'axe \mathcal{F} de direction \mathcal{G} et de rapport r est l'application affine a qui fixe les points de \mathcal{F} (un point de \mathcal{F}) et dont l'application linéaire associée est l'affinité (vectorielle) d'axe F de direction G et de rapport r , c'est à dire l'application qui envoie le vecteur $x = y + z, y \in F, z \in G$ sur $y + rz$.

Exemple 4.1. Si $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est le graphe de la fonction $x \mapsto f(x)$, alors le graphe de la fonction $x \mapsto rf(x)$ est l'image de Γ par l'affinité d'axe (Ox) , de direction (Oy) et de rapport r .

Remarque 4.3. Une symétrie est une affinité de rapport -1 .

5. MESURES ALGÈBRIQUES ET THÉORÈME DE THALÈS.

Les résultats qui suivent sont vrais dans le plan, mais aussi dans n'importe quel espace affine (en se restreignant au plan contenant les points qui nous intéressent). On pourrait donner une version plus générale du théorème de Thalès, pour des droites non coplanaires de l'espace affine de dimension ≥ 3 , mais le théorème classique reste le plus utile.

Définition 5.1. Soit D une droite et \vec{u} un vecteur non nul de \vec{D} . Si A et B sont deux points de D , alors la mesure algébrique \overline{AB} (par rapport au vecteur \vec{u}) est le réel tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{u}$.

Remarque 5.1. (fondamentale) On remarque que si A, B, C sont trois points (deux à deux distincts) alignés, alors le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ est indépendant du vecteur \vec{u} choisi, c'est l'unique réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$.

Théorème 5.1. (Thalès)

Soient D et D' deux droites sécantes en un point O , A, B deux points de D distincts de O , C, D deux points de D' distincts de O . Alors

$$(AC) // (BD) \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}},$$

et ce rapport est encore égal à $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$.

Théorème 5.2. (Ceva)

Soit ABC un triangle, D, E, F trois points situés respectivement sur les droites (BC) , (CA) , (AB) . Alors les droites (AD) , (BE) , (CF) sont parallèles ou concourantes ssi on a

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1.$$

Théorème 5.3. (Menelaüs)

Soit ABC un triangle, D, E, F trois points situés respectivement sur les droites (BC) , (CA) , (AB) . Alors les points D, E, F sont alignés ssi on a

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1.$$

EXERCICES.

GÉOMÉTRIE AFFINE

Exercice 1. 1/ Montrer que

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 2+a-b & a \\ a-2b & 4+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous espace affine de $M_2(\mathbb{R})$, dont on donnera la direction.

2/ Montrer que $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1\}$ est un sous espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dont on donnera un point et la direction.

3/ Si \mathcal{E} est un espace affine réel de dimension 3, muni du repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on définit les points $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 2)$ et $C(0, 1, -2)$, les droites données par les représentations paramétriques

$$d_1 = \{(3 - \lambda, 1 + 2\lambda, -1 + \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}; \quad d_2 = \{(1 + 3\mu, -2\mu, 3 + 5\mu), \mu \in \mathbb{R}\}.$$

et les plans $P_1 = \{(1 - 2\lambda + 3\mu, -2 + \lambda + \mu, 4 - \lambda - 2\mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$, $P_2 : 2x - y + 3z = 1$, $P_3 : x + 2z = 4$.

a/ Donner une équation cartésienne de P_1 .

b/ Déterminer une représentation paramétrique de $P_2 \cap P_3$.

c/ Donner une équation cartésienne du plan contenant A, B, C .

d/ Déterminer $d_1 \cap P_2$.

e/ Donner une équation cartésienne du plan Q contenant d_1 et parallèle à d_2 .

f/ Déterminer $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

g/ Déterminer $(AB) \cap P_2$.

h/ Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par A parallèle à P_2 et coupant d_1 .

i/ Donner une équation cartésienne du plan passant par C et contenant d_1 .

Exercice 2. On note A, B, C, D quatre points d'un espace affine tels que A, B, C soient affinement indépendants; on dit que $ABCD$ forme un parallélogramme quand $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

- (a) $ABCD$ est un parallélogramme;
- (b) les droites $(AB), (CD)$, ainsi que $(AD), (BC)$ sont deux à deux parallèles;
- (c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;
- (d) les milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$ sont confondus.

Exercice 3. 1/ Montrer le théorème de la *droite des milieux* : si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté. De plus, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est égale à la moitié de celle du troisième côté. Donner une réciproque de ce théorème.

2/ Soit $ABCD$ un quadrilatère; on note I, J, K, L les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Montrer que les segments $[IK]$ et $[JL]$ ont même milieu, et que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 4. Montrer qu'une partie d'un espace affine est convexe ssi elle est stable par la formation de barycentres à poids positifs.

Exercice 5. On rappelle que le centre de gravité d'un triangle ABC est l'isobarycentre de ses sommets.

1. Montrer, à l'aide de l'associativité du barycentre, que le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de chacune de ses médianes, en partant du sommet.

2. Montrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité ssi on a $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Exercice 6. Soit $ABCD$ un tétraèdre de l'espace affine \mathbb{R}^3 . On note respectivement G_1, G_2, G_3 et G_4 les centres de gravité des triangles BCD, ACD, ABD et ABC .

1/ On note G l'isobarycentre des points A, B, C, D . Montrer, à l'aide de l'associativité du barycentre, qu'on a

$$\begin{aligned} G &= \text{Bar}((A, 1), (G_1, 3)) \\ &= \text{Bar}((B, 1), (G_2, 3)) \\ &= \text{Bar}((C, 1), (G_3, 3)) \\ &= \text{Bar}((D, 1), (G_4, 3)) \end{aligned}$$

2/ En déduire que les droites $(AG_1), (BG_2), (CG_3)$ et (DG_4) sont concourantes en G , et qu'on a $\overrightarrow{G_1G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{G_1A}, \overrightarrow{G_2G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{G_2B}, \overrightarrow{G_3G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{G_3C}$ et $\overrightarrow{G_4G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{G_4D}$.

Exercice 7. Soient O et A deux points du plan et a un réel donné non nul. On définit une suite de points A_n du plan par $A_0 = A, A_1 = O$, et pour tout entier naturel n, A_{n+2} est le barycentre du système :

$$((A_{n+1}, 1 + a), (A_n, -a)).$$

On désigne par x_n l'abscisse du point A dans la repère (O, \overrightarrow{OA}) .

1/ Démontrer que pour tout n , on a $x_{n+1} = ax_n - a$.

2/ On suppose ici que $a = 1$; exprimer x_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite x_n , et que peut-on en déduire pour la suite des points A_n ?

3/ On suppose maintenant $a \neq 1$.

a/ Déterminer un réel b tel que la suite de terme général $U_n = x_n + b$ soit une suite géométrique, et préciser sa raison.

b/ Exprimer U_n , puis x_n en fonction de n ; quelle est la limite de la suite x_n ?

c/ Qu'en déduire pour les points A_n quand a vaut $\frac{1}{2}$, -1 , 2 ?

Exercice 8. Soient \mathcal{E} un espace affine, et F, G deux sous-espaces affines de \mathcal{E} . On note H le plus petit sous-espace affine contenant F et G .

1/ Soient $M \in F$, $M' \in G$; montrer que $\vec{T} = \vec{F} + \vec{G} + \text{Vect}(\overrightarrow{MM'})$.

2/ Montrer que $F \cap G$ est non vide ssi le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à $\vec{F} + \vec{G}$.

3/ En déduire les égalités suivantes

— $\dim T = \dim(\vec{F} + \vec{G}) + 1$ si $F \cap G$ est vide;

— $\dim T = \dim(\vec{F} + \vec{G})$ si $F \cap G$ est non vide.

Exercice 9. Soit ABC un triangle, et G son centre de gravité. On désigne par D, E, F les barycentres respectifs des systèmes :

$$((A, 1), (B, 2), (C, 3)); ((A, 2), (B, 3), (C, 1)); ((A, 3), (B, 1), (C, 2)).$$

On note A', B', C', D', E' et F' les milieux respectifs des segments $[BC], [AC], [AB], [EF], [DF]$ et $[DE]$.

a/ Faire une figure en justifiant les constructions.

b/ Montrer que G est le centre de gravité du triangle DEF .

c/ Montrer que chaque médiane de l'un des triangles ABC ou DEF est parallèle à un côté de l'autre triangle.

Exercice 10. Soit ABC un triangle, et M un point du segment $[AB]$. On note

— N le projeté de M sur $[BC]$ parallèlement à (AC) ;

— O le projeté de N sur $[AC]$ parallèlement à (AB) ;

— P le projeté de O sur $[AB]$ parallèlement à (BC) ;

— Q le projeté de P sur $[BC]$ parallèlement à (AC) ;

— R le projeté de Q sur $[AC]$ parallèlement à (AB) ;

— S le projeté de R sur $[AB]$ parallèlement à (BC) ;

On pose $M = \text{Bar}((A, t), (B, 1 - t))$. Donner les coordonnées barycentriques de N pour A et C , etc... En déduire que $S = M$.

Exercice 11. Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension n , et $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n$ deux familles de points affinement indépendants de \mathcal{E} . On suppose que pour tout $0 \leq i \leq n$, B_i est le barycentre des A_j munis des poids λ_{ij} , avec $\sum_{j=0}^n \lambda_{ij} = 1$. On note L la matrice des λ_{ij} .

Si M est le barycentre des B_i munis des poids μ_i , et le barycentre des A_i munis des poids ν_i , avec $\sum_{i=0}^n \nu_i = \sum_{i=0}^n \mu_i = 1$, montrer que

$$\begin{pmatrix} \nu_0 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Exercice 12. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine, et M un point de \mathcal{F} . Montrer que la fibre $f^{-1}(\{M\})$ est soit vide, soit un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction $\text{Ker } \vec{f}$.

Exercice 13. Prouver le théorème de Thalès à l'aide d'une homothétie bien choisie.

Exercice 14. a/ Montrer que l'ensemble des points fixes d'une application affine f d'un espace affine \mathcal{E} dans lui-même est soit vide, ou alors un sous-espace affine de direction $\text{Ker}(\vec{f} - \mathbf{I}_E)$.

b/ En déduire que f admet un unique point fixe ssi l'application linéaire associée \vec{f} n'admet pas 1 comme valeur propre.

c/ Montrer que f et la translation de vecteur \vec{v} commutent ssi $\vec{v} \in \text{Ker}(\vec{f} - \mathbf{I}_E)$.

Exercice 15. On note ABC un triangle, et A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Déterminer les transformations affines $s_{B'} \circ s_{A'}$ puis $s_{C'} \circ s_{B'} \circ s_{A'}$ (pour chacune d'elles on commencera par déterminer l'application linéaire associée).

Exercice 16. Montrer que la composée de deux homothéties de centres O et O' et de rapports a et b est une homothétie de rapport ab quand $ab \neq 1$. Montrer que son centre est sur la droite (OO') et l'exprimer comme un barycentre de O et O' .

Montrer que c'est une translation quand $ab = 1$, et déterminer son vecteur.

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel de dimension 2; un endomorphisme de E est une *transvection vectorielle* s'il existe une base où sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un réel $a \neq 0$.

Si \mathcal{E} est un espace affine de direction E , et O un point de \mathcal{E} , on définit une *transvection affine* $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ par $f(M) = O + u(\overrightarrow{OM})$, où u est une transvection vectorielle.

1/ Montrer que f est une bijection affine, et déterminer l'ensemble de ses points fixes.

2/ Soient A, B, C et A' dans \mathcal{E} tels que $f(B) = B$, $f(C) = C$ et $f(A) = A'$. Que peut-on dire de la droite (AA') ? Construire à la règle $f(M)$ quand M est un point quelconque du plan.

Montrer que la composée de deux symétries par rapport à une droite est en général une transvection.

Exercice 18. Soit \mathcal{E} un espace affine de direction E . On suppose que $E = F \oplus D$, où D est une droite vectorielle. Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction F , et p la projection affine sur \mathcal{F} parallèlement à D . Si k est un réel, on définit $a_k(M) = p(M) + kp(M)\vec{M}$ pour tout M de E .

Montrer que a_k est une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} (l'*affinité de direction* D , d'*hyperplan* \mathcal{F} et de rapport k), déterminer son application linéaire associée, et l'ensemble de ses points fixes.

Exercice 19. On se place dans les hypothèses du théorème de Menelaüs.

1/ On suppose les points D, E, F alignés, et on note P le projeté de A sur la droite (DE) parallèlement à la droite (BC) . Dédire du théorème de Thalès que

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AP}}; \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.$$

En déduire l'égalité dans le théorème de Menelaüs.

2/ Inversement on suppose que

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1.$$

a/ On suppose que les droites (EF) et (BC) sont parallèles. Montrer à l'aide du théorème de Thalès que $\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$, et en déduire que $B = C$, une contradiction.

b/ On note P le point d'intersection des droites (EF) et (BC) . Dédire du 1/ que

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1,$$

puis que $P = D$.

Exercice 20. 1/ On se donne un repère barycentrique du plan \mathcal{P} , (A, B, C) , et P, Q, R des points de \mathcal{P} de coordonnées barycentriques respectives (a_P, b_P, c_P) , (a_Q, b_Q, c_Q) , (a_R, b_R, c_R) . Montrer que P, Q, R sont alignés ssi on a

$$\begin{vmatrix} a_P & b_P & c_P \\ a_Q & b_Q & c_Q \\ a_R & b_R & c_R \end{vmatrix} = 0.$$

En déduire l'équation en coordonnées barycentriques de la droite (QR) .

2/ (théorème de Menelaüs). On se donne un triangle (ABC) , et trois points $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ distincts de A, B, C .

a/ Donner les coordonnées barycentriques de A', B', C' dans le repère (A, B, C) en fonction de $\overline{A'B}, \overline{A'C}, \overline{B'C}, \overline{B'A}, \overline{C'A}, \overline{C'B}$.

b/ Dédire des questions précédentes le théorème de Menelaüs : les points A', B' et C' sont alignés ssi

$$\frac{\overline{A'B} \overline{B'C} \overline{C'A}}{\overline{A'C} \overline{B'A} \overline{C'B}} = 1.$$

Exercice 21. On va montrer le théorème de Ceva.

0/ Soit $M = \text{Bar}((A, a), (B, b), (C, c))$, non situé sur l'un des segments $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$. Montrer que la droite (AM) rencontre la droite (BC) en le point D ssi on a

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{c}{b}.$$

1/ a/ On suppose les trois droites parallèles. Montrer à l'aide du théorème de Thalès que

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}; \quad \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}},$$

et en déduire le résultat.

b/ On suppose les trois droites concourantes. Soit $M = \text{Bar}((A, a), (B, b), (C, c))$ leur point de concours. Montrer le résultat à l'aide de 0/.

2/ On suppose ici que

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1.$$

Admettons que les droites ne soient pas parallèles, et supposons que (AD) et (BE) sont sécantes au point $M = \text{Bar}((A, a), (B, b), (C, c))$. Dédire du 0/ que

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{c}{b}, \quad \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = -\frac{a}{c}.$$

En déduire que $\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} = -\frac{a}{b}$, puis utiliser encore le 0/ pour montrer que la droite (CM) coupe (AB) en F .

Exercice 22. On considère trois droites dans le plan affine \mathcal{P} ramené à un repère cartésien, D_1, D_2, D_3 d'équations cartésiennes respectives

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0, \quad a''x + b''y + c'' = 0.$$

1/ On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

a/ Montrer qu'il existe un vecteur de la forme $(x_0, y_0, 1)$ tel que $f(x_0, y_0, 1) = 0$ ssi les trois droites D_1, D_2, D_3 sont concourantes.

b/ Montrer qu'il existe un vecteur de la forme $(x_0, y_0, 0)$ non nul tel que $f(x_0, y_0, 0) = 0$ ssi les trois droites D_1, D_2, D_3 sont parallèles.

c/ En déduire que les trois droites D_1, D_2, D_3 sont concourantes ou parallèles ssi on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

2/ On se donne un triangle (ABC) , et trois points $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ distincts de A, B, C .

a/ Donner les équations des droites (AA') , (BB') , (CC') dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ à l'aide des quantités $\overline{A'B}, \overline{A'C}, \overline{B'C}, \overline{B'A}, \overline{B'C}, \overline{C'A}, \overline{C'B}$.

b/ En déduire le théorème de Ceva : les droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes ou parallèles ssi on a

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$