TD3 - Variables aléatoires

Exercice 1. *Niveau Tle*
Une enquête a révélé que la probabilité qu'un bus soit en retard de moins de 6 minutes à une station S est égale à $0,85$. On admet que les retards sont indépendants les uns des autres. On donnera les résultats à 10^{-3} près par excès.
Un lycéen prend le bus cinq fois en une semaine à la station S. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où il a attendu moins de 6 minutes.
Donner la probabilité de X.

Exercice 2. *Niveau Tle*
On dispose de n billes et de trois casiers. On jette au hasard, l'une après l'autre, les billes dans les casiers, sachant qu'une bille va obligatoirement dans un casier. Soit X le nombre de billes contenues dans le casier numéro 1 lorsque toutes les billes ont été lancées. Déterminer la loi de X.

Exercice 3. Un médecin envisage d'installer un cabinet de traumatologie dans une station de sports d'hiver pendant la saison de ski. Il estime qu'un tel cabinet devient rentable à partir de 10 patients par jour. En moyenne, dans cette station, 5000 personnes skient par jour, et d'après les statistiques, chaque skieur a une probabilité de 0,001 d'être victime d'une mauvaise chute.
Calculer la probabilité que le cabinet soit rentable.

Exercice 4. Une fabrique produit des tubes électroniques dont en moyenne 1 % sont défectueux. On suppose alors que le fait qu'un tube donné soit défectueux est un événement aléatoire de probabilité 0,01 et que ces événements liés aux différents tubes sont indépendants. Monsieur Martin achète 300 tubes. La fabrique garantit ses tubes à 97 %.

1- Soit X le nombre de tubes défectueux parmi les tubes achetés par Monsieur Martin. Quelle est la loi de X ? Par quelle loi peut-on l'approcher ? (On pourra utiliser l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson).

2- Déterminer la probabilité que Monsieur Martin, après avoir testé ses tubes, revienne à la fabrique pour faire marcher la garantie.

Exercice 5. Pour $\theta \in]0,1[$ et $n \geq 2$, on définit la suite p_k par :

$$p_k = \begin{cases} C_n(1-\theta)\min\{k, n-k\} & \text{si} \quad k = 1, ..., n-1 \\ \theta & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

où C_n est une constante positive. Déterminer C_n de sorte que p_k soit une loi de probabilités sur $\{1, ..., n\}$.

Exercice 6. Pour $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite u_n définie par :

$$u_n = \int_0^\theta \frac{x^{n+1}}{1-x^2} dx.$$

1- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
2- On pose : $p_n = C u_n$.
Déterminer C de sorte que p_n soit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

Exercice 7. Calculer l'espérance et la variance d'une v.a.r. X suivant :

1- la loi binomiale $B(n, p)$ (où n est un entier naturel non nul et $p \in [0, 1]$),
2- la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ (où $\lambda > 0$),
3- la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p (où $p \in]0, 1]$).