1) $a)$ *Montrer que pour tout réel* $x, E(x+1) = E(x)+1$.

$b)$ *Montrer que pour tout entier naturel* n, *et pour tout réel* $x, E(x+n) = E(x)+n$.

2) *Soit la fonction* $\varphi : x \mapsto 4E(x) - 2E(2x) + 1$.

$b)$ *Montrer que* φ *est périodique*.

$c)$ *Ecrire plus simplement* φ *sur l'intervalle* $[p\,;p+1[$ *où* p *est un entier*.

Déduire de $b)$ *que : pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $p \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\ldots\,;\,n-1\}$, *on a*:

$$\forall\, x \in \left[\frac{p}{n};\frac{p}{n}+\frac{1}{2n}\right], \varphi(nx) = 1 \text{ et } \forall\, x \in \left[\frac{p}{n}+\frac{1}{2n};\frac{p+1}{n}\right], \varphi(nx) = -1$$

3) *Soit* f *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *et vérifiant la condition suivante*

Il existe un réel $k > 0$ *tel que* $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.

$a)$ *Montrer que* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\forall\, p \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\ldots\,;\,n-1\}$,

$$\int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\varphi(nx)dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} \left[f\left(u+\frac{p}{n}\right) - f\left(u+\frac{p}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right] du$$

$b)$ *Déduire de ce qui précède que* : $\left|\int_0^1 f(x)\varphi(nx)dx\right| \leq \dfrac{k}{4n}$

$c)$ *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)\varphi(nx)dx$

p+1 1

2 p p 1

f f(x)φ(nx)dx = f [f (u +) − f(u + +)] du .

p o n n 2n

1 k

Déduire de ce qui précède que : If f(x)φ(nx)dxI ≤ ·

o 4n

1

En déduire lim f f(x)φ(nx)dx .

→+ o