PARTIE A

$Soit\ f\ la\ fonction\ f\ définie\ sur\ ]-1,1[\ définie\ par : f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1°/ Etudier les variations de f.

2°/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1,1[$ une solution unique α et que $\alpha > \frac{4}{5}$

3°/ En déduire le signe de $f(x) - x$

4°/ Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur IR.

$5°/\ Montrer\ que\ pour\ tout\ x\ de\ IR\ on\ a : f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$

PARTIE B

Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 \in [0,\alpha] \\ U_{n+1} = f^{-1}(U_n) \end{cases}$

1°/ a) Montrer que, pour tout n de IN, $0 \leq U_n \leq a$.

b) Montrer que la suite U est croissante.

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

$2°/\ Montrer\ que\ pour\ tout\ x \in IR^+\ on\ a : |(f^{-1})'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$3°/\ Montrer\ que\ pour\ tout\ n \in IN\ on\ a : |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|U_n - \alpha|$

$4°/\ En\ déduire\ que\ pour\ tout\ n \in IN\ on\ a : |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |U_0 - \alpha|$

Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

PARTIE C

$Soit\ la\ fonction\ h\ définie\ sur\ ]-1,1[\ par : h(x) = f\left(-sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

$1°/\ Montrer\ que\ pour\ tout\ x\ de\ ]-1,1[: h(x) = -1 - tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

2°/ Montrer que h réalise une bijection de $]-1,1[$ sur IR.

$3°/\ Montrer\ que\ h^{-1}\ est\ dérivable\ sur\ IR\ et\ que : (h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi(1+(x+1)^2)}$

$4°/\ Soit\ pour\ tout\ x\ de\ IR^*\ la\ fonction\ H\ tel\ que : H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

a) Montrer que H est dérivable sur R et déterminer $H'(x)$.

$b)\ Calculer\ H\left(\frac{1}{2}\right)\ et\ H\left(-\frac{1}{2}\right).\ En\ déduire\ que : \begin{cases} H(x) = -1\ si\ x > 0 \\ H(x) = 1\ si\ x < 0 \end{cases}$

$5°/\ Pour\ n\ de\ IN\ on\ définit\ les\ suites\ (V_n)\ et\ (W_n)\ par : V_n = \sum_{k=1}^{n}\left[h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right]\ et\ W_n = \frac{V_n}{n}$

$a)\ Donner\ la\ valeur\ de\ H\left(1 + \frac{1}{k}\right)\ En\ déduire\ que : \forall\ k \in IN^* : h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$

$b)\ Montrer\ que\ pour\ tout\ n\ de\ IN^* : V_n = n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right) = -1$

En déduire que la suite (W_n) est convergente et donner sa limite.