On désigne par φ l'application qui a tout point M≠O et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' *définie par* : $z' = \frac{5}{\overline{z}}$

1) Déterminer l'affixe du point A' image par φ du point A d'affixe $1 + \mathrm{i}$.

2) a) Placer les points A et A' dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathbf{j}})$.Vérifier que O, A et A' sont alignés.

b) Montrer que O, M et M' sont alignés.

3) Montrer que pour tout point M≠O on a $\varphi o \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.

4) Rechercher l'ensemble Γ des points invariants par φ puis tracer φ sur la figure précédente.

5) a) Soit z un nombre complexe non nul, montrer que si $|\mathrm{z} - (1 + \mathrm{i})| = \sqrt{2}$ alors :

$$\left|\frac{5}{1-\mathrm{i}} - \frac{5}{\overline{\mathrm{z}}}\right| = \left|\frac{5}{\overline{\mathrm{z}}}\right|$$

b) En déduire que si M est un point autre que O du cercle $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ de centre A passant par O alors son image M' par φ appartient à une droite Δ que l'on déterminera.

c) Montrer que tout point de Δ est l'image par φ du point de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ \ {O}.

En déduire l'image de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ \ {O} par φ.

d) Tracer $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ et Δ.