

Devoir n° 2

Rappel : Le Devoir est un travail individuel. Vous ne devrez pas chercher de l'aide ailleurs que dans les notes de cours et de TD. Vous ne devrez pas non plus, apporter de l'aide aux autres.

Vos réponses devraient être justifiées, par exemple avec des calculs intermédiaires et/ou l'énoncé d'une formule ou un théorème utilisé. Les calculatrices sont permises, et probablement utiles!

On considère une espèce de plante dont un certain gène, composé de deux allèles de type A ou a, détermine le phénotype de couleur des pétales de fleurs : "rouge" dans les cas AA et Aa, "blanche" dans le cas aa. La couleur rouge est donc dominante. On commence avec une population \mathcal{P} (supposée grande) dont la loi de génotype est donnée par les fréquences suivantes des AA, Aa et aa (on ne distingue pas Aa et aA) :

$$p_{AA} = 16\%, p_{Aa} = 48\%, p_{aa} = 36\%. \quad (1)$$

Pour construire une nouvelle génération, prenons deux individus dans \mathcal{P} au hasard et de façon indépendante, de génotype G_1 et G_2 respectivement. On choisit au hasard (équiprobabilité et indépendance) un allèle $u_1 \in \{A, a\}$ et $u_2 \in \{A, a\}$ de chaque individu. On a donc par exemple : $P(u_1 = A | G_1 = Aa) = \frac{1}{2}$ et $P(u_1 = A | G_1 = aa) = 0$.

1. Quelle est la probabilité de l'événement : $\{G_1 = AA \text{ et } G_2 = Aa\}$?
2. Quelle est la loi de u_1 ; c'est à dire les probabilités $P(u_1 = A)$ et $P(u_1 = a)$?
3. Calculer les probabilités que (u_1, u_2) valent chacun des couples (A, A) , (A, a) , (a, A) , (a, a) .
4. Si l'on considère (A, a) et (a, A) comme le même génotype Aa, en déduire que la loi de génotype (1) est stable par fécondation binaire. (Et donc la tableau de fréquence (1) sera le même pour la nouvelle génération dans cette expérience.)
5. (*) Plus généralement, supposons que la loi de génotype est donnée par les probabilités : p_{AA} , p_{Aa} , $p_{aa} \geq 0$ (avec $p_{AA} + p_{Aa} + p_{aa} = 1$). Montrer que la loi est stable par cette procédure de fécondation binaire si et seulement si :

$$p_{Aa}^2 = 4 p_{AA} p_{aa}. \quad (2)$$

Dans la même population (1), prenons encore deux individus au hasard, mais cette fois-ci parmi les plantes à fleurs rouges. On note leur génotype H_1 et H_2 respectivement. On choisit au hasard (équiprobabilité) un allèle $v_1 \in \{A, a\}$ et $v_2 \in \{A, a\}$ de chaque individu.

6. Que valent les probabilités $P(H_1 = AA)$, $P(H_1 = Aa)$ et $P(H_1 = aa)$?
7. Est-ce que cette loi de génotype est stable par fécondation binaire ?
8. Calculer les probabilités que (v_1, v_2) valent (A, A) , (A, a) , (a, A) , (a, a) .
9. Notons \mathcal{F} la phénotype de (v_1, v_2) .
Calculer $P(H_1 = AA | \mathcal{F} = \text{"rouge"})$ et $P(H_1 = AA | \mathcal{F} = \text{"blanche"})$.