

1. Relations binaires

On considère l'ensemble \mathcal{E} des vecteurs d'un plan. On considère la relation binaire \mathcal{R} sur l'ensemble \mathcal{E} définie par $\vec{u} \mathcal{R} \vec{v} \Leftrightarrow$ les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires (c'est-à-dire de même direction, ce qui peut être interprété comme : $\exists k$ un réel non nul tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$).

Établir si cette relation est une relation d'ordre, d'équivalence ou ni l'une ni l'autre.

2. Matrices

Les temps de trajet en provenance de Paris vers 3 destinations en métropole et via 3 moyens de transports différents sont recensés dans la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 1,5 & 3 \\ 4,5 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les lignes de la matrices correspondent aux destinations (Bordeaux, Lyon et Strasbourg respectivement). Pour chaque destination, le temps de trajet en heures depuis Paris est indiqué selon le moyen de transports utilisé en colonne (voiture, avion et train respectivement).

1) Interpréter selon le contexte de l'exercice, la signification du coefficient valant 3 en 1ère ligne et 3ème colonne de la matrice M .

Une petite entreprise parisienne décide de réaliser sa prochaine réunion de conseil d'administration en province, soit à Bordeaux, soit à Lyon, soit à Strasbourg. Les trois employés principaux Henri, Tony et Lucie devant assister à cette réunion se verront chacun payer leur trajet par l'entreprise. Henri voyage en voiture, Tony en avion et Lucie en train. La matrice P suivante recense le coût moyen horaire de chacun des moyens de transport évoqués (voiture, avion et train respectivement)

$$P = \begin{pmatrix} 20 \\ 150 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

2) Sachant que la ville d'accueil de la réunion sera celle pour laquelle l'entreprise aura à déboursier le moins d'argent pour les trajets de ses trois employés, réaliser expliquer le calcul permettant de déterminer quelle sera la ville d'accueil. En déduire quelle sera cette ville d'accueil.

3) Après une crise économique sans précédent, le coût des billets de train, d'avion et le prix de l'essence ont flambé. Le nouveau coût horaire d'un déplacement en voiture vaut x , celui en avion vaut y et celui en train vaut z . On sait qu'au final, avec ces nouveaux tarifs, le prix total pour les trajets d'Henri, Lucie et Tony que devra payer l'entreprise sera de 570 euros si la réunion a lieu à Bordeaux, de 392.5 euros si la réunion a lieu à Lyon et de 805 euros si elle a lieu à Strasbourg.

Expliquer pourquoi la recherche des inconnues x, y et z doit se faire par la résolution d'une équation matricielle $A \times X = B$ où A et B sont des matrices à déterminer et X correspond à :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

4) Prouver que $A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$.

5) En déduire ainsi la valeur des nouveaux coûts horaires en voiture, en avion et en train.