Exercice 3: 8 points.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3\times(0,5)^n, \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

1. Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide de votre calculatrice. Vous donnerez des valeurs approchées à 10^{-2} près.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n								

2. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer par un raisonnement de récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{15}{4}\times(0,5)^n$
4. En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \leq 0$.
5. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

On se propose dans la suite de l'exercice de déterminer la limite de la suite (u_n). Pour cela on considère la suite (v_n) définie par: $v_n = u_n - 10\times(0,5)^n$ pour tout entier naturel n.

6. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,2. Exprimer le réel v_n en fonction de n.
7. En déduire que $u_n = -8\times(0,2)^n + 10\times(0,5)^n$ pour tout n entier naturel.
8. Déterminer la limite de la suite (u_n).