

**Exercice 2: 6 points.**

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :  $u_0 = a$  ;  $v_0 = b$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $0 < a < b$ .

et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  et  $v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$ .

- 1) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$ .  
b) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$ .  
c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \leq v_n$ .
- 2) a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
b) Comparer  $v_{n+1}^2$  et  $v_n^2$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .
- 3) Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes.