PROBLÈME 2

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = x^2 - 3x + 4$ et on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Le point D a pour coordonnées $(0; 1)$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$ le point M a pour coordonnées $(x; f(x))$.

1. Expérimentation avec *GeoGebra*

   Créer la fonction f, les points D et M ainsi que le segment [DM].

   Existe-t-il une position de M pour laquelle la distance DM est minimale?

2. Preuve de la conjecture précédente.

   On introduit la fonction d définie pour tout nombre réel x par $d(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9$. On admet que d est dérivable sur $\mathbf{R}$.

   (a) Montrer que pour tout nombre réel x, $\mathrm{DM}^2 = d(x)$.

   (b) Expliquer pourquoi les fonctions $x \mapsto \mathrm{DM}$ et d ont les mêmes variations sur $\mathbf{R}$.

   (c) Donner une condition nécessaire pour que $d(x)$ soit minimale. Est-elle suffisante?

   (d) Montrer que pour tout nombre réel x, $d'(x) = 2(x-1)(2x^2 - 7x + 9)$.

   (e) En déduire une preuve de la conjecture.