Exercice 6
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$1 - e^{i\theta} \ \ , \ \ e^{e^{i\theta}} \ \ , \ \ e^{i\theta} + e^{2i\theta}$$

Exercice 7
Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$1 + i \ \ , \ \ 1 - j \ \ , \ \ 4ab + 2(a^2 - b^2) \text{ avec } (a, b) \neq (0, 0)$$

Exercice 8
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$. Puis linéariser $\cos^4\theta$ et $\sin^3\theta$.

Exercice 11
À quelle condition sur le complexe z a-t-on $z^2 - z \in i\mathbb{R}$?
Exercice 12
Soit $a := e^{2i\frac{\pi}{5}}$.

1. Calculer a^5 et montrer que
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \ a^{5-k} = \overline{a^k}.$$
2. Calculer $A := 1 + a + a^2 + a^3 + a^4$.
3. Vérifier $|a| = 1$ et montrer que $a^3 = \overline{a^2}$ et $a^4 = \overline{a}$. En déduire une autre écriture de A.
4. Montrer alors que
$$(a + \overline{a})^2 + a + \overline{a} - 1 = 0.$$
5. En déduire l'expression exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 6 *Similitude directe*

On considère l'application ϕ du plan euclidien dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (-1 - \sqrt{3}\,i)\,z + 2 - \sqrt{3}\,i$.

6.1) Montrer que ϕ admet un unique point invariant. On le notera Ω et son affixe ω.

6.2) Montrer que pour tout $M \neq \Omega$ le rapport $\frac{\Omega M'}{\Omega M}$ et l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$ sont indépendants de M.

6.3) Déduire de ce qui précède que ϕ est la composée de deux transformations affines simples du plan, de centre Ω et qui commutent entre elles.

Exercice 7 *Racines n-ièmes complexes*

7.1) Déterminer les racines huitièmes de $512\left(\sqrt{3} - i\right)$.

7.2) Quelle est la nature du polygone que forment leurs images dans le plan.