B. On s'intéresse à la suite (S_n) définie par : $S_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Avec un logiciel ou une calculatrice :

a. Conjecturer à l'aide d'un algorithme la limite ℓ de cette suite. Expliquer votre démarche.

b. Déterminer le premier entier n tel que $S_n \approx \ell$ à 10^{-4} près.

2. Soit (V_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par : $V_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$.

a. Calculer V_n en fonction de n et en déduire la limite de (V_n).

b. Montrer que pour tout $n \geq 1$: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \leq n^4$.

c. Déduire de la partie A que pour tout $n \geq 1$, $V_n - \frac{1}{6}\,\frac{1}{n^2} \leq S_n \leq V_n$.

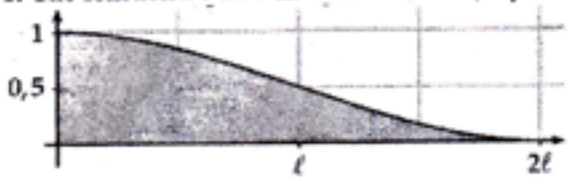
d. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 2

Un théâtre veut bâtir une rampe conduisant d'un palier à un autre, plus haut de 1 dm. La norme impose que la rampe ne doit pas être anguleuse et que la pente de la rampe ne doit pas excéder 10%.
2ℓ est la longueur au sol de la rampe où ℓ est en dm.
Une fonction h modélise la courbure de la rampe où x et $h(x)$ sont en dm.
On admet alors que la norme entraîne les conditions :

- $h(0) = 1$ • $h(2\ell) = 0$
- $h'(0) = 0$ • $h'(2\ell) = 0$
- Pour tout $x \in [0; 2\ell]$, $|h'(x)| \leq 0{,}1$.

1. Une fonction $h : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$, représentée ci-dessous, modélise la courbure de la rampe.



Exprimer a, b, c et d en fonction de ℓ.

2. Le but est d'avoir une rampe de longueur minimale.

a. Exprimer $h'(x)$ en fonction de ℓ.

b. Calculer $h''(x)$ et étudier son signe. En déduire que h' admet un minimum en ℓ.

c. Appliquer la condition sur la pente maximale pour déterminer la longueur de rampe minimale.