

## Méthodes en géométrie dans l'espace

Pour les exemples, j'utiliserai les points :  $A(2, 1, -1)$ ,  $B(4, -1, 2)$ ,  $C(1, 2, 3)$  et le plan  $P$  d'équation :  $x + y - 2z + 7 = 0$ . On a alors  $\overrightarrow{AB}(2, -2, 3)$  et  $\overrightarrow{AC}(-1, 1, 4)$ .

**1. Démontrer que 3 points déterminent un plan**

les points  $A, B, C$  déterminent un plan si et seulement si ils ne sont pas alignés donc si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires si et seulement si il existe un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$ .

$\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$  équivaut au système : 
$$\begin{cases} -1 &= 2k \\ 1 &= -2k \\ 4 &= 3k \end{cases}$$
. Ce système n'a pas de solution car on obtient deux valeurs

différentes de  $k$ ;  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont donc pas colinéaires, les 3 points  $A, B, C$  déterminent un plan.

**2. Représentation paramétrique d'une droite****a. Détermination d'une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$** 

Un point  $M(x, y, z)$  appartient à la droite  $(AB)$  si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires donc si et seulement si il existe un réel  $t$  tel que  $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$  ce que l'on traduit en terme de coordonnées :

$$\begin{cases} x - 2 &= 2t \\ y - 1 &= -2t \\ z + 1 &= 3t \end{cases} \quad \text{soit encore} \quad \begin{cases} x &= 2t + 2 \\ y &= -2t + 1 \\ z &= 3t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

*Remarque* : On peut utiliser n'importe quel vecteur directeur de la droite et n'importe quel point de la droite, une droite possède une infinité de représentations paramétriques.

**b. Cas particuliers**

L'axe des abscisses a pour représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Même raisonnement pour les deux autres axes.

**c. Caractéristiques d'une droite dont on a une représentation paramétrique**

Soit la droite  $D$  ayant pour représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x &= -k + 2 \\ y &= 2k + 3 \\ z &= 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

On obtient un vecteur directeur en prenant les coefficients de  $k$  soit :  $\vec{U}(-1, 2, 4)$  et un point en donnant n'importe quelle valeur à  $k$ , le plus simple étant  $k = 0$  ce qui donne le point  $(2, 3, 0)$

**d. Savoir si un point est sur une droite dont on a une représentation paramétrique**

Le point  $E(-1, 9, 12)$  appartient-il à la droite  $D$  (définie en c.) ?

$E$  appartient à la droite  $D$  si il existe un réel  $k$  tel que 
$$\begin{cases} -k + 2 &= -1 \\ 2k + 3 &= 9 \\ 4k &= 12 \end{cases}$$

ces trois équations équivalent à  $k = 3$  donc le point  $E$  appartient à la droite  $D$ .

Si les 3 équations ne donnent pas la même valeur pour le paramètre, le point n'appartient pas à la droite.

**e. Positions relatives de deux droites données par des représentations paramétriques**

Ne pas oublier que dans l'espace, il y a trois possibilités : deux droites peuvent être :

- parallèles (strictement parallèles ou confondues)
- sécantes
- quelconques c'est-à-dire non sécantes et non parallèles.

On commence par déterminer un vecteur directeur de chaque droite et on regarde si ils sont ou non colinéaires.

- Si les vecteurs sont colinéaires, les droites sont parallèles. Pour savoir si elles sont strictement parallèles ou confondues, on prend un point quelconque d'une des droites (voir c.) et on voit s'il appartient aussi à l'autre droite (voir d.), si oui les droites sont confondues, si non elles sont strictement parallèles.

- Si les vecteurs ne sont pas colinéaires, on cherche si les droites ont un point commun, pour cela on résout un système formé par les représentations paramétriques des droites .

*Exemple :* La droite  $(AB)$  et la droite  $D$  conduisent au système : 
$$\begin{cases} 2t + 2 &= -k + 2 \\ -2t + 1 &= 2k + 3 \\ 3t - 1 &= 4k \end{cases}$$

On résout le système formé par deux des équations, si ce système a une solution, on regarde si la solution trouvée est aussi solution de la troisième équation.

Le système formé par les deux premières équations a pour solution :  $(k, t) = (-2, 1)$  , ce couple n'est pas solution de la troisième équation, les droites ne sont pas sécantes, elles sont quelconques.

Si le système admet une solution, les droites sont sécantes, on obtient les coordonnées du point d'intersection en remplaçant la valeur trouvée pour le paramètre dans l'une des représentations paramétriques.

### 3. Équation cartésienne d'un plan

#### a. Détermination d'une équation cartésienne

Pour déterminer une équation cartésienne d'un plan, on utilise un vecteur normal au plan (vecteur dont la direction est orthogonale au plan) et un point du plan.

*Exemple :* Équation cartésienne du plan  $Q$  passant par  $C$  orthogonal à la droite  $(AB)$ .

Se rappeler que : **lorsqu'une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites du plan**

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est normal au plan  $Q$  donc orthogonal à tous les vecteurs du plan  $Q$ .

Un point  $M(x, y, z)$  appartient au plan  $Q$  si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CM}$  sont orthogonaux donc si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) - 2(y - 2) + 3(z - 3) = 0 \quad \text{soit} \quad 2x - 2y + 3z - 7 = 0$$

*Remarque :* Contrairement à l'infinité de représentations paramétriques d'une droite, une équation cartésienne de plan est unique à un coefficient près, c'est-à-dire que l'on peut multiplier ou diviser les deux membres de cette équation par n'importe quel réel non nul.

#### b. Cas particuliers

Le plan  $xOy$  admet pour vecteur normal le vecteur  $\vec{k}(0, 0, 1)$  et passe par  $O$ , il a pour équation  $z = 0$ .

Même raisonnement pour les deux autres plans de coordonnées.

#### c. Caractéristiques d'un plan dont on connaît une équation cartésienne

L'équation cartésienne d'un plan est de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Le triplet  $(a, b, c)$  constitue les coordonnées d'un vecteur normal à ce plan.

Pour savoir si un point donné appartient à ce plan, on regarde si les coordonnées de ce point vérifient l'équation.

#### d. Intersection d'une droite et d'un plan

*Exemple :* Intersection de la droite  $D$  de représentation paramétrique 
$$\begin{cases} x &= -k + 2 \\ y &= 2k + 3 \\ z &= 4k \end{cases}$$
 et du plan  $Q$  d'équation

$$2x - 2y + 3z - 7 = 0$$

On forme le système : 
$$\begin{cases} x &= -k + 2 \\ y &= 2k + 3 \\ z &= 4k \\ 2x - 2y + 3z - 7 &= 0 \end{cases}$$

En remplaçant  $x, y$  et  $z$  par leurs expressions dans la quatrième équation, on obtient :

$$2(-k + 2) - 2(2k + 3) + 3(4k) - 7 = 0$$

$$6k - 9 = 0 \quad \text{soit} \quad k = \frac{3}{2} \quad \text{Le système a une solution, la droite } D \text{ coupe le plan } Q.$$

En remplaçant  $k$  par sa valeur dans les trois premières équations, on obtient les coordonnées du point d'intersection soit  $(\frac{1}{2}, 6, 6)$ .

Si le système n'a pas de solution, la droite est strictement parallèle au plan.

Si le système a une infinité de solution, ce qui se produit quand on arrive avec la quatrième équation à  $0k = 0$  alors la droite est située dans le plan.

**e. Démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan**

Une droite est orthogonale à un plan quand elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

*Exemple :* Démontrer que la droite  $\Delta$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .

$\Delta$  admet pour vecteur directeur  $\vec{V}(1, 1, 0)$ .

$$\vec{V} \cdot \vec{AB} = 1 \times 2 + 1 \times (-2) + 0 \times 3 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{V} \cdot \vec{AC} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 0 \times 4 = 0$$

$\vec{V}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  donc la droite  $\Delta$  est orthogonale aux droites  $(AB)$  et  $(AC)$  droites sécantes du plan  $(ABC)$ ,  $\Delta$  est donc orthogonale au plan  $(ABC)$ .

Si le plan est donné par une équation cartésienne, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan sont colinéaires.

**f. Positions relatives de deux plans**

Deux plans peuvent être parallèles (strictement parallèles ou confondus) ou sécants suivant une droite..

Si les deux plans sont donnés par une équation cartésienne, on a immédiatement un vecteur normal à chaque plan.

Si ces vecteurs sont colinéaires alors les plans sont parallèles sinon ils sont sécants.

*Exemple :* Le plan  $P$  d'équation :  $x + y - 2z + 7 = 0$  a pour vecteur normal  $\vec{U}(1, 1, -2)$ ,

le plan  $Q$  d'équation :  $2x - 2y + 3z - 7 = 0$  a pour vecteur normal  $\vec{V}(2, -2, 3)$

On vérifie facilement que ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans  $P$  et  $Q$  sont sécants.

Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection, on écrit le système formé par les deux équations. Ce système comporte 3 inconnues et 2 équations, on exprime deux inconnues en fonction de la troisième. Posons par exemple  $x = t$ .

$$\text{Le système s'écrit alors : } \begin{cases} y - 2z = -t - 7 \\ -2y + 3z = -2t + 7 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y = 2z - t - 7 \\ -2(2z - t - 7) + 3z = -2t + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 4t + 7 \\ y = 7t + 7 \end{cases}$$

$$\text{La droite d'intersection admet pour représentation paramétrique : } \begin{cases} x = t \\ y = 7t + 7 \\ z = 4t + 7 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

**g. Inéquations définissant un demi espace**

Un plan partage l'espace en 2 demi-espaces. Si le plan a pour équation  $ax + by + cz + d = 0$ , les points d'un demi-espace ouvert vérifient l'inégalité :  $ax + by + cz + d > 0$  et ceux de l'autre demi-espace ouvert l'inégalité :  $ax + by + cz + d < 0$

*Exemple :*  $P$  a pour équation  $x + y - 2z + 7 = 0$ . Les coordonnées du point  $O(0, 0, 0)$  vérifient  $x + y - 2z + 7 > 0$  donc tous les points situés du même côté que  $O$  par rapport au plan  $P$  vérifient la même inégalité.

**4. Problèmes de distances****a. Distance de deux points**

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\text{Exemple : } AB = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-1 - 1)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$$

**b. Distance d'un point à un plan**

$$\text{Distance d'un point } A \text{ au plan d'équation } ax + by + cz + d = 0 : \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

*Exemple :* Distance de  $A(2, 1, -1)$  au plan  $P : x + y - 2z + 7 = 0$

$$d = \frac{|2 + 1 - 2 \times (-1) + 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}.$$

## 5. Problèmes de solides

### a. Volume d'un tétraèdre

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une face} \times \text{hauteur correspondante.}$$

La hauteur étant la distance entre le quatrième sommet et la face utilisée.

(Ceci peut être utilisé pour calculer la distance entre un sommet et une face quand on connaît déjà le volume et l'aire de la face.)

### b. Équation d'une sphère

*Exemple* : Équation de la sphère de centre  $A$  tangente au plan  $P$ . (notations : 4.b.)

Si la sphère est tangente au plan  $P$ , son rayon est la distance du point  $A$  au plan  $P$  soit  $2\sqrt{6}$ .

Un point  $M(x, y, z)$  appartient à la sphère si et seulement si  $AM = 2\sqrt{6}$  soit encore  $AM^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24$  soit

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 24$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 = 24$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 18 = 0$$

D'une manière générale, la sphère de centre  $A$  et de rayon  $r$  a pour équation :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2 .$$