Université Pierre et Marie Curie année universitaire 2015-2016

L2 - Unité d'enseignement 2P020-FOAD

Devoir n^o3 (à rendre avant le 25 mars 2016)

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes, souvent rencontrées en physique.

a) $\int_0^H (K + \rho\, g\, l\, z)\, dz$ où K, ρ, g et l sont des constantes.

b) $\int_0^T \; g\, t\, dt$ où g et T sont des constantes.

c) $\int_0^T \; v_0\, e^{-t/\tau}\, dt$ où v_0 et T sont des constantes.

d) $\int_{R_T}^{R_T+h} \; \frac{G\, m\, M_T}{r^2}\, dr$ où G, m, M_T et R_T sont des constantes.

e) $\int_{-T}^{T} \; e^{-\gamma\,|t|}\, dt$ où γ et T sont des constantes.

f) $\int_0^R \; \frac{r\, dr}{(r^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$ où R est une constante.

Exercice 2 :

Soit G une fonction définie par $G(x) = \int_0^x e^t \; \ln(1 + e^{-t})\, dt$.

a) Montrer que G est deux fois dérivable, calculer sa dérivée $G'(x)$ et sa dérivée seconde $G''(x)$.

b) Déterminer le développement limité de G à l'ordre 2 au voisinage de 0.

c) Déterminer une équation de sa tangente au points d'abscisse $x = 0$ et préciser la position du graphe par rapport à la tangente dans un voisinage du point d'abscisse $x = 0$.

d) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $u > 0$:

$$u - \frac{u^2}{2} < \ln(1 + u) < u$$

e) En déduire que $x + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2} \; < \; G(x) \; < \; x$ pour $x > 0$.

f) Trouver un équivalent de $G(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

g) Exprimer $G(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 3 :

Soit f une application continue à valeurs positives de $[0,\, 1]$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = 3$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé de la forme $[0,\, \eta]$, avec $0 < \eta$, sur lequel $f(x) \geq 2$. En déduire que $\int_0^1 (f(x))^n\, dx \; \to \; +\infty$ quand $n \; \to \; +\infty$.

Exercice 4 :

Étudier les intégrales suivantes, éventuellement en fonction des valeurs des réels a et b, et calculer leur valeur s'il y a lieu :

a) $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$ b) $\int_2^3 \frac{2x+5}{x(x-1)(x-4)}\, dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^a \, dx$ d) $\int_1^{+\infty} \left((1+\frac{1}{x})^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}\right) dx$

e) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a\,(\ln x)^b}\, dx$ f) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a\,(1+x^b)}\, dx$

Exercice 5 :

Etudier la convergence des séries suivantes :

a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\, e^{\frac{1}{n}} - n\right)$ f) $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-n})$

Exercice 6 :

On considère la série numérique de terme général u_n pour $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$u_n = \left(n\, \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}$$

a) Montrer que si cette série est convergente pour une valeur a donnée, elle converge pour tout $b \geq a$.

b) Montrer que si $a \leq 2$ la série est divergente. On pourra utiliser un développement limité de $\ln(u_n)$.

c) On pose $a = 2+\varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 1$. Montrer que u_n est équivalent à $\exp\left(\frac{-n^\varepsilon}{6}\right)$. En déduire que la série est alors convergente.

d) Donner toutes les valeurs de a pour lesquelles cette série converge.

Exercice 7 :

On pose $f(n) = \int_0^1 x^n\, e^{-x}\, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite $f(n)$ est positive est décroissante. Au moyen d'une intégration par parties, donner une relation de récurrence entre $f(n)$ et $f(n-1)$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $f(n) = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$.

b) Montrer que $\frac{1}{e(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la nature des séries : $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$, et $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, f(n)$.

c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, x^n$.