Université Pierre et Marie Curie année universitaire 2015-2016

L2 - Unité d'enseignement 2P020-FOAD

# Devoir $n^o$2 (à rendre avant le 26 février 2016)

NB : les exercices 1 à 3 sont extraits de l'examen de 2P020 (présentiel) de juin 2015.

**Exercice 1 :**

On note : $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $T$ la transformation de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que : $T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Ecrire la matrice $M$ de $T$.

2. Calculer l'image par $T$ d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

3. Calculer $M^2$ et $M^3$, ainsi que $\vec{f}_1 = T^2(\vec{e}_1)$, $\vec{f}_2 = -T(\vec{e}_3)$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$.

4. Montrer que le système $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Donner la matrice $N$ de l'application $T$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

**Exercice 2 :**

On considère le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} 3\,x(t) - y(t) = \dot{x}(t) \\ x(t) + y(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

1. Ecrire ce système différentiel sous forme matricielle, avec une matrice de coefficients qu'on notera $A$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$. Est-elle diagonalisable ? Argumentez de manière rigoureuse.

2. Calculer l'exponentiel de la matrice $A\,t$, où $t$ est un nombre réel quelconque.

3. Résoudre le système pour les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente.

**Exercice 3 :** Soit $A$ et $B$ des matrices $n \times n$ inversibles. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies indépendamment du choix de $A$ et $B$ ? Justifier vos réponses.

a) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

b) $A^2$ est inversible et $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$

c) $A + B$ est inversible et $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

d) $(A\,B\,A^{-1})^3 = A\,B^3\,A^{-1}$

**Exercice 4 :**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -6 & -6 & 7 \end{pmatrix}$. Chercher ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Si elle est diagonalisable, trouver une base de vecteurs propres et donner les matrices de passage $P$ et $P^{-1}$. Calculer $P^{-1}\,A\,P$ pour vérifier vos calculs. Si elle n'est pas diagonalisable, trouver une base de vecteurs dans laquelle elle s'écrit sous forme triangulaire supérieure.

**Exercice 5 :**

Soit la matrice $A$ définie par :

$$\begin{pmatrix} -2 & 5/2 & 11/2 \\ -1 & 5/2 & 13/2 \\ 2 & -5/2 & -11/2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une base dans laquelle la matrice $A$ devient la matrice $T$ égale à :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Préciser en particulier les valeurs de $a$ et $b$ et donnez les matrices de passage $P$ et $P^{-1}$ permettant de passer de $A$ à $T$.

b) Résoudre le système différentiel $\frac{d\,\vec{v}}{d\,t} = A\,\vec{v} + \vec{b}$ où les coordonnées de $\vec{v}(t)$ sont $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, celles de $\vec{b}$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et celles de $\vec{v}(0)$ sont $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 6 :**

Deux ressorts identiques (de raideur $\gamma$ et de longeur au repos $L$) sont attachés l'un à l'autre, et à deux masses identiques (de masse $m$) coulissant sans frottement le long d'un axe (Fig. 1). Le premier ressort est par ailleurs attaché au mur. Un ressort, une fois déformé de $\delta\,l$ (qui peut être négatif), exerce une force $\gamma\,\delta\,l$ sur la masse à sa droite.

1. Exprimer les déformations $\delta\,l_1$ et $\delta\,l_2$ en terme de coordonnées de déplacements des masses $x_1$ et $x_2$ (à partir de leur position d'équilibre $L$ et $2\,L$).

2. Montrer que les oscillateurs couplés de la Fig. 1 vérifient un système d'équations de la forme :

$$\begin{pmatrix} m\,\ddot{x}_1(t) \\ m\,\ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} = -\gamma.M \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

où les composantes de la matrice $M$ sont à déterminer.

3. Trouver les valeurs propres de $M$. Trouver ses vecteurs propres. En utilisant ces résultats, interpréter les modes propres des mouvements du système d'oscillateur de la Fig. 1.

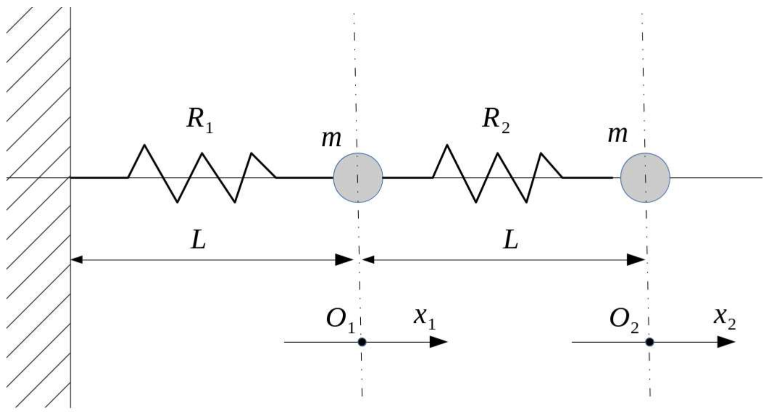


FIG. 1 –