S. Barbier

Devoir de mathématiques
pour le 28 janvier 2016

Exercice 1

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^5 - 1 = 0$ et de tracer les images des solutions dans le plan complexe.

1.a. Montrer que le module d'une solution de (E) est 1.

b. Qu'en déduit-on pour les images des solutions de (E) ?

2.a. Montrer que (E) équivaut à $(z = 1 \text{ ou } z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0)$.

On note dans la suite (E_1) l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

b. Vérifier que 0 n'est pas une solution de (E_1) et qu'on a l'équivalence :

$$z \text{ est une solution de } (E_1) \iff \frac{1}{z} \text{ est une solution de } (E_1)$$

On pose l'inconnue auxilaire $Z = z + \dfrac{1}{z}$ et (E_2) : $Z^2 + Z - 1 = 0$.

c. Montrer l'équivalence :

$$z \text{ est une solution de } (E_1) \iff Z \text{ est une solution de } (E_2)$$

d. Résoudre l'équation (E_2) puis l'équation (E_1) et enfin l'équation (E) en donnant les formes algébriques des solutions.

3. Dans le plan complexe, on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et Γ le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{4};0\right)$ et passant par $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$. On note J et K les points d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses (tels que l'abscisse de J soit positive) et T et T' les tangentes à Γ en J et K. On note B, C, D, E les points d'intersections de T et T' avec $\mathscr{C}$ et A le point d'affixe 1.

Faire une figure propre à la main ou avec GeoGebra.

Montrer que A, B, C, D et E sont les images des solutions de (E).

On verra bientôt que ces points sont les sommets d'un pentagone régulier.