Devoir n^o1 (29 janvier 2016)

Exercice 1 :

On considère un triangle (ABC) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ ont les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{OA} = (-2, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 5)$ et $\overrightarrow{OC} = (x, y)$, où x et y sont deux réels.

1) Montrer que l'aire du triangle (ABC) est égale à la valeur absolue de $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$.

2) Déterminer l'ensemble des points C donnant une aire du triangle (ABC) égale à $2/3$ et le représenter sur un graphe. Cet ensemble forme-t-il un espace vectoriel ? Si oui, en donner une base.

Exercice 2 :

1) On considère l'ensemble des triplets de réels (x, y, z) qui vérifient $2x - y - z = 0$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

2) Même question pour les (x, y, z) qui vérifient $x + 2y - 3z = 0$.

3) Déterminer l'intersection de ces deux ensembles. Est-ce un espace vectoriel ? si oui, en donner une base.

Exercice 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

1) Montrer qu'on a la relation $A^2 - (a + d)\,A + (a\,d - b\,c)\,I_2 = 0$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) On définit et on note Tr la trace d'une matrice carrée par la somme des éléments situés sur sa diagonale (i.e. éléments de même numéro de ligne et de colonne). Montrer qu'on a $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ et $\mathrm{Tr}(A\,B) = \mathrm{Tr}(B\,A)$, quelles que soient les matrices carrées d'ordre 2 A et B.

3) Déduire de la question précédente qu'il est impossible de trouver des matrices carrées d'ordre 2 X et Y telles que $X\,Y - Y\,X = I_2$.

4) Montrer que la trace d'une matrice représentant une application linéaire dans une certaine base est indépendante du choix de cette base.

Exercice 4 :

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, et les vecteurs $\vec{v_1} = (1,0)$ et $\vec{v_2} = (0,2)$. Calculer et tracer sur un graphe les images de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ par les applications linéaires dont les représentations dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On donnera éventuellement une interprétation géométrique de ces transformations.

Exercice 5 :

Soit M une matrice carrée nilpotente (i.e. dont une puissance est nulle) d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la matrice $I_n - M$ est inversible, et que $(I_n - M)^{-1} = I_n + M + M^2 + \cdots$.

2) Calculer l'inverse de la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 :

Trouver une matrice carrée X d'ordre 3 telle que

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 :

1) Montrer que les vecteurs (1, 2, 1), (2, 3, 3) et (3, 7, 1) forment une base de $\mathbb{R}^3$, ainsi que les vecteurs (3, 1, 4), (5, 2, 3), et (1, 1, −6), et calculer la matrice de passage de la première base à la seconde.

2) Même problème, dans $\mathbb{R}^4$, pour les vecteurs

(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 3)

et

(1, 0, 3, 3), (−2, −3, −5, −4), (2, 2, 5, 4), (−2, −3, −4, −4).

Exercice 8 :

Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}$, où x, y, z et t sont des réels quelconques, est un espace vectoriel de dimension 4 dont on donnera une base $(E_i)_{1\leq i\leq 4}$ telle que :

$E_1^2 = E_1$, $E_i^2 = -E_i$ et et $E_1\,E_i = E_i\,E_1 = E_i$ pour $2 \leq i \leq 4$,

$E_2\,E_3 = -E_3\,E_2 = E_4$, $E_3\,E_4 = -E_4\,E_3 = E_2$, et $E_4\,E_2 = -E_2\,E_4 = E_3$.

Exercice 9 :

1) Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ -y+z & = & 2 \\ x-2y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z-3t & = & 1 \\ 2x+y-z+t & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcr} x+2y-3z & = & 4 \\ x+3y-z & = & 11 \\ 2x+5y-5z & = & 13 \\ x+4y+z & = & 18 \end{array}\right.$$

2) Résoudre et donner une interprétation géométrique : $\left\{\begin{array}{rcr} x+my & = & -3 \\ mx+4y & = & 6 \end{array}\right.$

3) Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système : $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & m \\ x+y-z & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 10 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $(\vec{e_1},\, \vec{e_2},\, \vec{e_3})$. Soit $\vec{v} = (x, y, z)$ un vecteur de E dans cette base. Soit f une application linéaire de E dans E telle que

$$f(x, y, z) = (-x+y-z,\, 2x+2z,\, 4x-2y+4z)$$

1) Donner la matrice A de f dans la base $(\vec{e_1},\, \vec{e_2},\, \vec{e_3})$.

2) Déterminer les sous-espaces Ker$f$ et Imf.

3) Montrer que les vecteurs $\vec{u_1} = (1, 0, -1)$, $\vec{u_2} = (1, 2, 0)$ et $\vec{u_3} = (0, 1, 1)$ forment une base de E.

4) Calculer $f(\vec{u_1})$, $f(\vec{u_2})$ et $f(\vec{u_3})$. Déterminer la matrice B de f dans la base $(\vec{u_1},\, \vec{u_2},\, \vec{u_3})$.

5) Déterminer les valeurs propres de f et un vecteur propre pour chacune d'entre elles.