EXERCICE 1

Soit x et y deux réels strictement positifs U la suite définie par $U_n = \frac{x^n - y^n}{x^n + y^n}$

1) Exprimer U_n en fonction de n et du rapport $\frac{x}{y}$.

2) Montrer que U est convergente vers $1, -1$ ou 0 suivant les valeurs de $\frac{x}{y}$.

EXERCICE 2

Soit $U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$

1) Montrer que (U_n) $(n \in \mathbb{N}^*)$ est monotone.

2) Démontrer que pour tout entier naturel $p \geq 2$: $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$

3) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

4) En déduire (U_n) $(n \in \mathbb{N}^*)$ est bornée

EXERCICE 3

On considère la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}\right) \forall\, n \geq 1 \end{cases}$$

et la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ définie par : $b_n = \sqrt{1 + 24a_n}$

1) Montrer que $b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + 3)\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

En déduire une formule explicite de b_n

2) Montrer que $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3 \times 2^{2n-1}}$

EXERCICE 4

On considère la suite (U_n) définie par :

$U_1 > 1$ *et* $U_{n+1} = U_n^2 - 2$.

On pose $S_n = \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_1 U_2} + \cdots + \frac{1}{U_1 \ldots . U_n}$

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

a) $U_1 \ldots . U_n (2S_n - U_1) = -U_{n+1}$

b) $S_n^2 - U_1 S_n + 1 = \frac{1}{(U_1 \ldots . U_n)^2}$